405

DE LINEARVM CVRVARVM VM LINEIS RECTIS COMPARATIONE DISSERTATIO GEOMETRICA.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

Autore M. P. E. A. S.



TOLOSÆ,

ud ARNALDVM COLOMERIVM, Regis & Academiæ Toloſanæ Typographum.

M. DC. LX.

Digitized by Google

TYPOGRAPHVS LECTORI.

CVM Diſſertatio iſta, quæ in noſtras non ita pridem manus occultato Autoris nomine venit, nouam iudicio peritorum Geometrarum planamque aperiat viam ad curuarum linearum dimenſionem; è re Geometricâ fore putaui vt publicè extaret; quapropter illam prælo noſtro edendam curaui. Vale.

Digitized by Google

DE LINEARVM CVRVARVM cum lineis rectis comparatione diſſertatio Geometrica.

NONDVM, quod ſciam, lineam curuam purè Geometricam rectæ datæ Geometræ adæquarunt. Quod enim à ſubtili illo Mathematico Anglo nuper inuentum & demonſtratum eſt cycloidem nempe primariam diametri circuli ipſam generantis eſſe quadruplam, hoc ſuam ex ſententiâ doctiſſimorum Geometrarum videtur habere limitationem: ij quippe hanc eſſe legem & ordinem naturæ pronuntiant vt non ſinat inueniri rectam curuæ æqualem, quin priùs ſuppoſita fuerit alia recta alteri curuæ æqualis. Quod quidem in exemplo cycloidis ab ipſis allato ita ſe habere deprehendunt, nec nos diffitemur, cùm conſtet deſcriptionem cycloidis indigere æqualitate alterius curuæ cum rectâ, hoc eſt circumferentiæ circuli cycloidem generantis cùm rectâ quæ eſt baſis ipſius cycloidis. Sed quàm vera ſit hæc, quam ſtatuunt, lex naturæ, & quàm periculoſum ab vno aut altero experimento ſtatim ad axioma properare infrà patebit. Nos enim curuam verè Geometricam & ad cuius conſtructionem nulla talis alterius curuæ cum rectâ æqualitas præceſſiſſe ſupponatur, rectæ datæ æqualem eſſe demonſtrabimus; & paucis, quantum fieri poterit totum negotium abſoluemus.

Digitized by Google

PROPOSITIO PRIMA.

SIT in Fig.1.curua quæuis A H K G in eaſdē partes curua, exempli causâ vna ex parabolis infinitis in quâ tangētes extra curuā cum baſe A F & axe F G concurrant, & ſumatur in huiuſmodi curuâ quoduis punctum H per quod ducatur tangens I H K, in quâ ſumptis ex vtrâque parte punctis K & I demittantur perpendiculares I B, K D in baſim A F quæ ſecent curuam in punctis R & M. Aio portionem tangentis H I portione curuæ R H eſſe minorem, portionem autem eiuſdem tangentis H K portione curuæ H M eſſe maiorem: Cum enim ex hypotheſi tangens K I occurrat baſi A F extra curuam, ergo angulus C H I erit minor recto, ideoque à puncto H demiſſa perpendicularis in rectam K I cadet in punctū V ſupra puncta B R I. Patet itaque rectam H V minorem eſſe rectâ H I, item rectam H I minorem eſſe rectâ quæ puncta H & R coniungit; ergo à fortiori recta H I minor erit portione curuæ H R quæ rectam ab H ad R ductam ſubtendit; quod primo loco fuit demonſtrandum. Aio iam portionem K H portione curuæ H M eſſe maiorem. A puncto K ducatur ad eandem curuam tangens K N & demittatur perpendicularis N E. Ex prædemonſtratis probatum eſt rectam K N eſſe minorem portione curuæ N M: Sed ex Archimede ſumma tangentium H K, K N eſt maior totâ portione curuæ H N. Ergo portio tangentis H K portione curuæ H M, maior erit. Quod ſecundo loco fuit oſtendendum. Nec moueat tangentem à puncto K vltra punctum G aliquando curuæ occurrere. Hoc enim caſu aliud punctum inter K & M ſumi poterit, & omnia ad præcedentem demonſtrationem aptari. Inde ſequitur ſi à punctis K & I ducantur perpendicu-

Digitized by Google

lares ad axem curuam in punctis O & P ſecantes, hoc caſu tangentem H I curuâ H O eſſe maiorem, tangentem verò H K curuâ H P eſſe minorem. Si enim imaginemur inuerti figuram ita vt axis in locum baſeos, baſis in locum axis transferatur, non ſolum ſimilis in hoc caſu, ſed eadem omninò erit demonſtratio.

Patet autem ex ipsâ conſtructione, ſi rectæ B C & C D ſint æquales portiones tangentis H I & H K eſſe item inter ſe æquales, quod tamen ſummopere notandum.

PROPOSITIO II.

AD dimenſionem linearum curuarum non vtimur inſcriptis & circumſcriptis more Archimedeo, ſed circumſcriptis tantùm ex portionibus tangentium compoſitis, duas enim ſeries tangentium exhibemus quarum vna maior eſt curuâ, altera minor: demonſtrationem autem multò faciliorem & elegantiorem per circumſcriptas ſolas euadere Analyſtæ experientur.

Poſſibile igitur, vt vult methodus Archimedea, pronuntiamus cuilibet ex curuis iam prædictis circumſcribere duas figuras ex rectis conſtantes quarum vna ſuperet curuam interuallo quouis dato minore, altera autem ſuperetur à curua interuallo etiam dato minore.

Exponatur curua aliqua ex prædictis in 2. Figura. Secetur baſis A F in quotlibet portiones æquales, A B, B C, C D, D E, E F, F G & à punctis B, C, D, E, F, erigantur perpendiculares B Q, C V, D Z, E R, F M, quæ occurrant curuæ in punctis P, T, Y, N, O. Ducantur item tangentes A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I. Ex primâ propoſitione patet tangentem A Q, portione curuæ A P eſſe maiorem: item tangentem P V, portione curuæ

P T eſſe maiorem & ſic de reliquis; tandemque etiam vltimam O I portione curuæ O H eſſe maiorem. Ergo figura conſtans ex omnibus iſtis tangentium A Q, P V, T Z, Y R, N M, O I portionibus curua ipſa maior erit.

At exponatur eadem curua in 3. Figura cuius baſis A G in eundem portionum æqualium numerum diuidatur in punctis B, C, D, E, F. A punctis B, C, D, E, F vt ſuprà erigantur perpendiculares B R, C Q, D O, E L, F I quæ occurrant curuæ in punctis S, P, N, M, K. A punncto autem S in hac tertia figura, ducatur tangens S T, occurrens perpendiculari A T, deinde à punctis P, N, M, K, H ducantur tangentes P R, N Q, M O, K L, H I occurrentes perpendicularibus B S, C P, D N, E M, F K in punctis R, Q, O, L, I. Ex prima propoſitione patet tangentem S T portione curuæ A S eſſe minorem, item tangentem P R portione curuæ P S eſſe minorem & ſic deinceps, tandemq; vltimam I H quæ parallela eſt baſi, portione curuæ K H eſſe minorem. Ergo figura conſtans ex omnibus iſtis tangentium S T, P R, N Q, M O, K L, H I portionibus curua ipſa minor erit.

Cum autem ex corollario propoſitionis primæ partes tangentium ab eodem puncto curuæ vtrinque productarum & portionibus baſis hinc inde æqualibus oppoſitarum ſint inter ſe æquales: patet cum 2. & 3. Figuræ curuæ ſupponantur æquales aut eadem potius, licet vitandæ confuſionis cauſa duas figuras deſcripſerimus, tangentem S T tertiæ figuræ æqualem eſſe tangenti P V ſecundæ figuræ, cum enim punctum S in tertia figura idem omninò ſit cum puncto P ſecundæ figuræ & portiones baſis A B, B C, in vtraque figura ſint inter ſe æquales; portiones tangentium ex vtraque parte ipſis oppoſitarum nempe recta

S T in 3. figura & recta P V in 2. inter ſe æquales erunt. Probabitur ſimiliter tangentem P R 3. figuræ æqualem eſſe tangenti T Z 2. & ſic de cæteris. Quo peracto conſtabit primam tantùm 2. figuræ & vltimam 3. nulli ex portionibus figuræ contrariæ æquales eſſe. Exceſſus igitur quo figura ſecunda ſuperat tertiam eſt idem quo tangens A Q 2. figuræ ſuperat tangentem I H 3. figuræ. Sed recta I H propter parallelas æquatur portioni baſis F G ſiue A B, ſupponuntur enim omnes baſis portiones æquales in vtraque figura, ergo figura ſecunda ex tangentibus curua maioribus compoſita ſuperat figuram tertiam ex tangentibus curua minoribus compoſitam eo ipſo quo in 2. figura tangens A Q ſuperat portionem baſis A B ipſi oppſitam interuallo.

Si igitur velimus duas figuras curuæ circumſcribere, alteram maiorem curua, alteram verò minorem, quæ ſe inuicem excedant interuallo minore quocumque dato, facillima erit conſtructio: Cum enim ex methodo tangentium iam cognita detur tangens ad punctum A, dabitur angulus Q A B, ſed angulus Q B A eſt rectus, ergo datur triangulum Q A B ſpecie, datur itaque ratio rectæ A Q ad A B. Cauendũ itaque eſt vt diuiſio baſis ita inſtituatur vt differentia rectarum A Q & A B ſit minor quacumque recta data. Quod ita aſſequemur ſi quæramus duas rectas in data ratione quæ ſe inuicem excedant recta data quæ ſit minor ea quæ data eſt. Hoc autem problema eſt facile, & curandum deinde vt portio quælibet baſis A B non ſit maior minore duarum quæ dicto problemati ſatisfaciunt.

Cum igitur hac ratione inuenerimus duas figuras curuæ circumſcriptas alteram maiorem, alteram minorem dicta curua quæ ſe inuicem excedunt interuallo minore quo-

cumque dato, à fortiori maior ex circumſcriptis ſuperabit curuam interuallo adhuc minore, & minor ex circumſcriptis ſuperabitur à curua interuallo adhuc minore.

Patet itaque ex noſtra hac methodo per duplicem circumſcriptionẽ commodum præberi aditum ad methodum Archimedeam cum agitur de dimenſione linearum curuarum. Quod ſemel monuiſſe & demonſtraſſe ſufficiet.

His poſitis ſecurè pronuntio inueniri poſſe curuam verè Geometricam datæ rectæ æqualem. Ea vero eſt vna ex infinitis, quas olim ſpeculati ſumus, parabolas; illa nempe in qua cubi applicatarum ad axem ſunt inter ſe vt quadrata portionum axis, de quo ne dubitent Geometræ ita breuiter demonſtro.

PROPOSITIO III.

SIT in 4. Figura parabole quam iam indicauimus M I V A cuius vertex A, axis A N, & in qua ſumpto quouis puncto I & ductis perpendicularibus ſeu applicatis ad axem rectis M N, I F, cubus rectæ M N ſit ad cubum rectæ I F, vt quadratum rectæ N A ad quadratum rectæ F A, idque ſemper contingat: probandum eſt curuam M I A rectæ datæ æqualem eſſe. Fiat vt quadratum axis A N, ad quadratum applicatæ N M, ita recta N M ad rectam A D ipſi A N perpendicularem. Patet rectam A D eſſe rectum dictæ parabolæ latus, hoc eſt ſolidum ſub A D in quadratũ rectæ A N æquari cubo applicatæ N M; idem ſumpto quouis alio puncto vt I, ſolidum ſub A D in quadratum A F æquari cubo applicatæ I F, quod non eget demonſtratione, in facilibus enim non immoramur: ducatur tangens ad punctum I, & ſit illa I O E quæ cum axe A N in puncto E concurrat. Ex methodo tangentium conſtat rectam F A,

rectæ

rectæ A E eſſe duplam, ideóque rectam F E ad rectam A F eſſe vt 3. ad 2. quadratum verò rectæ E F eſſe ad quadratum rectæ A F vt 9. ad 4. A recta A D abſcindatur nona ipſius pars C D, & reliqua C A biſecetur in B, erit igitur D A ad A B vt 9. ad 4. ſiue vt quadratum E F ad quadratum A F. Solidum itaque ſub A D in quadratũ A F æquale erit ſolido ſub quadrato F E in rectam A B. Sed ſolidum ſub A D in quadratum A F eſt æquale cubo rectæ I F, ergo ſolidum ſub rectâ A B in quadratum E F eſt æquale eidem cubo rectæ I F; eſt ergo vt quadratum E F ad quadratum I F ita recta I F ad rectam A B, & componendo ſumma quadratorum E F, & F I hoc eſt vnicum quadratum tangentis I E eſt ad quadratum I F, vt ſumma rectarum I F & A B ad A B.

Si autem ducatur à puncto I perpendicularis ad baſim recta I H & alia quæuis perpendicularis G Q V O occurrens applicatæ I F in Q: curuæ in V & tangenti in O, propter ſimilitudinem triangulorum erit vt I O ad I Q ſiue ipſi æqualem H G ita tangens I E ad applicatam I F, & vt quadratum I O ad quadratum H G ita quadratum I E ad quadratum I F.

Vt autem quadratum I E ad quadratum I F, ita ſumma rectæ I F & A B ad rectam A B. Ergo quadratum I O ad quadratum H G erit ſemper vt ſumma rectarum I E & A B ad rectam A B: Quod demonſtrare oportuit.

Inde ſequitur ſi rectæ M N ponatur in directum recta N X rectæ A B æqualis, eſſe ſemper vt quadratum tangentis I O ad quadratum rectæ H G, vel vt quadratum tangentis I Y ex altera parte ad quadratum rectæ oppoſitæ R H, vtrobique enim propter parallelas eadem eſt ratio, ita rectam H X ad rectam N X. Recta enim H X æqualis eſt ſum-

Digitized by Google

mæ rectarum IF, & AB, & recta NX eſt æqualis AB. Hoc autem patet ex conſtructione, recta enim HN propter parallelas æqualis eſt rectæ IF, & reliqua NX facta eſt æqualis rectæ AB.

PROPOSITIO IV.

EXponatur in 5. Figura noſtra hæc parabola AXE cuius ſit ea, vt diximus, natura vt cubi applicatarum ſint inter ſe in ratione quadratorum portionum axis: Sit eius axis AI, baſis aut ſemibaſis EI ex datis axe AI & applicata IE inuenitur, vt ſuperius diximus, rectum latus AD; à quo abſciſſa nona ipſius parte CD, & reliqua AC bifariam diuiſa in B, ſecetur baſis EI in quotlibet libuerit portiones æquales EF, FG, GH, HI & à punctis F, G, H excitentur perpendiculares FX, GY, HZ curuæ occurrentes in punctis X, Y, Z. Ad puncta autem E, X, Y, Z ducantur tangentes ER, XS, YT, ZV occurrentes perpendicularibus FX, GY, HZ, IA productis, in punctis R, S, T, V. Ponatur rectæ EI in directum recta IK æqualis rectæ AB. Patet ex præcedente propoſitione & ipſius corollario quadratum tangentis ZV ad quadratum rectæ HI eſſe vt rectam HK ad rectam KI. Similiter vt quadratum tangentis YT ad quadratum rectæ GH ita rectam GK ad rectam KI; item quadratum tangentis XS ad quadratum rectæ FG vt rectam FK ad rectam KI; denique vt quadratum tangentis ER ad quadratum rectæ EF ita rectam EK ad rectam IK: His poſitis à puncto K excitetur KL perpendicularis ad rectam EK, & fiat recta KL æqualis rectæ KI ſiue AB: Intelligatur iam per punctum K tanquam verticem, axem autem KE, deſcribi parabole ſimplex ſiue Archimedea cuius rectum latus ſit KL, & ſit illa parabola KM

Q ad quam excitentur perpendiculares E Q, F P, G O, H N, I M quæ erunt, vt patet, applicatæ parabolæ & in directum poſitæ perpendicularibus F X, G Y &c. Quadratum tangentis Z V, vt iam diximus eſt ad quadratum rectæ H I vt recta H K ad rectam I K.

Sed vt recta H K ad rectam I K ita ſingulis in rectam K L ductis, rectangulum ſub H K in K L ad rectangulum ſub I K in K L; rectangulum verò ſub H K in K L ex natura parabolæ Archimedeæ æquatur quadrato applicatæ H N, & rectāgulum ſub I K in K L æquatur quadrato rectæ K L, cum rectæ I K, K L factæ fuerint æquales: Erit igitur vt quadratum H N ad quadratum K L ita quadratum tangentis Z V ad quadratum rectæ H I, ideóque vt recta H N ad K L ita tangens Z V ad rectam H I. Similiter probabimus eſſe vt tangentem Y T ad rectam G H ita applicatam G O ad K L: Item vt tangentem X S ad rectam F G ita applicatum F P ad K L, denique vt tangentem E R, ad rectam E F ita eſſe applicatam E Q ad K L. Cum igitur ſit vt tangens Z V ad rectam H I ita applicata H N ad K L, rectangulum ſub extremis æquabitur rectangulo ſub mediis, ideóque rectangulum ſub N H in H I æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem Z V. Similiter rectangulum ſub O G in G H æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem Y T, item rectangulum ſub P F in F G æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem R S, denique rectangulum ſub E Q in E F æquabitur rectangulo ſub K L in tangentem E R: Quid autem pluribus in re procliui & iam ad methodum Archimedeam ſponte ſua vergente immoramur. Per inſcriptas enim & circumſcriptas in ſegmento parabolico figuras, rectangula omnia Q E F, P F G, O G H, N H I ſegmentum ipſum parabolicum E Q M I deſignabunt. Omnes autem

Digitized by Google

tangentes E R, X S, Y T, Z V per iteratam ſecundum noſtræ præcepta methodi circumſcriptionem curuam ipſam E X Y Z A etiam deſignabunt; ergo ſegmentum parabolicum E Q M I æquatur rectangulo ſub K L in curuam E X A. Datur autem in rectilineis ſegmentum parabolicum E Q M I, quadrauit enim parabolam Archimedes ideóque ipſius ſegmenta. Ergo rectangulum ſub K L in curuam E X A etiam datur: datur autem recta K L. Ergo datur curua E X A & ipſi alia recta poteſt conſtitui æqualis, quod erat demonſtrandum.

Si quibuſdam tamen hæc demonſtratio breuitate nimiâ laborare videatur, eam integram inſiſtendo veſtigiis Archimedeis non grauamur ſeparatim adiungere, vt eam legant & examinent qui ſuperiora non ſufficere exiſtimabunt. Probandum eſt ſegmentum parabolicum E Q M I rectangulo ſub datâ K L in curuam E X A æquale eſſe. Fiat ex Archimede ſegmentum illud parabolicum E Q M I æquale rectangulo ſub datâ rectâ K L in datam rectam β. Si probauerimus rectam β æqualem eſſe curuæ E X A conſtabit propoſitum. Aio itaque rectam β curuæ E X A eſſe æqualem. Si enim æqualis non eſt, erit vel maior vel minor. Sit primò recta β maior quàm curua E X A & ſit earum exceſſus, ſi fieri poſſit recta δ. Ex propoſitione ſecundâ huius poſſumus curuæ E X A circumſcribere figuram ex portionibus tangentium compoſitam quæ ſuperet curuam interuallo minore rectâ δ. Fiat igitur illa circumſcriptio & in figura ſeparatâ, quam etiam quintam romano charactere notauimus, circumſcripta illa conſtet ex portionibus tangentium E R, X S, Y T, Z V, circumſcripta illa ex prædemonſtratis eſt maior curuâ E X A. Sed & recta β poſita eſt maior eâdem curua. Cum ergo circumſcripta ſuperet curuam minori interuallo quàm recta β ſuperat eamdem curuam: Ergo circumſcripta minor eſt recta β. Rectangulum

Digitized by Google

itaque ſub rectâ K L in circumſcriptam eſt minus rectangulo ſub K L in rectam β. At rectangulum ſub K L in β factum eſt æquale ſegmento parabolico E Q M I: Ergo rectangulum ſub K L in circumſcriptam eſt minus dicto ſegmento parabolico E Q M I. Probauimus autem rectangulum ſub K L in portionem tangentis E R æquari rectangulo ſub Q E in E F, item rectangulum ſub K L in X S æquari rectangulo ſub P F in F G, item rectangulum ſub K L in Y T æquari rectangulo ſub O G in G H, denique rectangulum ſub K L in Z V æquari rectangulo ſub N H in H I, ergo rectangulum ſub K L in totam circumſcriptam eſt æquale ſummæ rectangulorum ſub Q E in E F, ſub P F in F G, ſub O G in G H & ſub N H in H I. Si autem in rectas F P, G O, H N, I M, quæ ſenſim decreſcunt qua propius accedunt ad verticem parabolæ, continuatas demittantur perpendiculares ſeu parallelæ baſi, à punctis Q, P, O, N rectæ Q γ, P θ, O λ, N φ. Patet rectangulum Q E F γ aquale eſſe rectangulo ſub Q E in E F, item rectangulum θ F æquari rectangulo ſub P F in F G, rectangulum λ G æquari rectangulo ſub O G in G H, denique rectangulum φ H æquari rectangulo ſub N H in H I. Ergo rectangulum ſub K L in circumſcriptam eſt æquale rectangulis γ E, θ F, λ G, φ H. Sed probauimus rectangulum ſub K L in circumſcriptam eſſe minus ſegmento parabolico E Q M I, ergo ſumma rectangulorum γ E, θ F, λ G, φ H erit minor dicto ſegmento parabolico E Q M I quod eſt abſurdum, illa enim rectangula conſtituunt figuram ex rectangulis compoſitam, & ſegmento parabolico, vt patet, circumſcriptam, ideóque ipſo ſegmento maiorem. Recta itaque β non eſt maior curuâ E X A. Sed neque minorem eſſe probabimus. Sit enim recta β minor curuâ E X A ſi fieri poteſt, & curua ſuperet rectam β interuallo δ. Circumſcribatur in figurâ ſeparatâ (quam etiam quintam charactere græco notauimus) figura conſtans ex portionibus

tangentium curuâ E X A minorum; ſed quam tamen ipſa curuâ ſuperet interuallo minore ipſo δ. Et ſit illa figura conſtans ex portionibus tangentium X R, Y S, Z T, A V: Cum itaque curua ſit maior β interuallo δ; & eadem curua ſuperet circumſcriptam interuallo minore ipſo δ, ergo circumſcripta erit maior rectâ β ideóque rectangulum ſub K L in circumſcriptam erit maius ſegmento parabolico E Q M I. Sed rectangulum ſub K L in circumſcriptam æquatur ex prædemonſtratis rectangulis ſub P F, in F E, ſub O G, in G F, ſub N H in H G & ſub M I in I H. Eſt enim vt X R ad F E ita F P ad K L, ideóque rectangulum ſub K L in X R æquatur rectangulo ſub P F in F E & ſic de reliquis. Cum igitur rectangulum ſub K L in circumſcriptam ſit maius ſegmento parabolico E Q M I, ergo ſumma rectangulorum ſub P F in F E, ſub O G in G F, ſub N H in G H & ſub M I in H I eſt maior dicto ſegmento parabolico, ſed omnia illa rectangula ductis perpendicularibus ſeu baſi parallelis rectis P γ, O ϑ, N λ, M ϕ quæ omnes cadent in applicatas intra parabolam, prout enim applicatæ magis diſtant à vertice eò magis ſemper augentur, erunt æqualia rectangulis P E, O F, N G, M H. Ergo ſumma omnium illorum rectangulorum P E, O F, N G, M H, erit maior ſegmento parabolico. Quod eſt abſurdum. Rectangula enim illa P E, O F, N G, M H componunt figuram ex rectangulis compoſitam & ipſi ſegmento parabolico inſcriptam, ideóque ipſo minorem. Recta itaque β non eſt minor curuâ E X A. Cum igitur nec ſit maior, nec minor erit ipſi curuæ æqualis. Quod prolixiùs, vt omnis remoueatur ſcrupulus, fuit demonſtrandum.

Ex iam demonſtratis patet eadem facilitate demonſtrari poſſe ſegmentum parabolicum quoduis E Q P F à priore abſciſſum, rectangulo ſub datâ K L in curuam E X æquale eſſe: Ideóque ſi detur in baſi quoduis punctum vt F, cum ex Archimede ſegmen-

tum parabolicum E Q P F in rectilineis detur, dari etiam & rectangulum ſub K L *datâ in portionem curuæ* E X ; *datur autem recta* K L, *ergo & curua* E X. *Dato itaque quouis puncto in baſe vt* F, *dari portionem curuæ ipſi oppſitam & rectam poſſe aſſignari huic æqualem manifeſtum eſt.*

Nec moueat ad rectam illam curuæ E X A æqualem inueniendam, conſtruendam videri parabolam ſimplicem, quo caſu problema ſolidum euaderet. Cùm enim ſupponatur ad veritatem tantùm inquirendam & demonſtrationem ritè conficiendam parabolæ illius deſcriptio; nihil vetat quo minus calculum ipſum diſſimulatâ illa imaginaria parabolæ deſcriptione, per rectas & circulos & expediamus & exhibeamus. Is autem calculus, niſi fallor, talis eſt. Eſto in figura ſexta, curua parabolica D A C eius naturæ vt cubi applicatarum D B & N M ſint inter ſe vt quadrata portionum axis B A & A M; dentur autem altitudo A B & ſemibaſis B D, aut tota D B C. Aio dari rectam curuæ D A C æqualem (quod iam probatum eſt) in calculo verè Geometrico. Sit rectum iſtius parabolæ latus recta A O, quam datam eſſe ex datis axe & applicata ex ſuprà dictis conſtat. A recta A O auferatur nona ipſius pars E O, reliqua verò A E fiat æqualis rectæ Y K, cui in directum ponatur *K X* æqualis applicatæ ſeu ſemibaſi D B. Super recta Y X tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus Y T X & rectâ *Y K* biſectâ in puncto R excitetur perpendicularis R T ſemicirculum ſecans in T, Rectæ R T fiat æqualis recta R V & ſuper recta V X tanquam diametro deſcribatur ſemicirculus V Q X ad cuius circumferentiam à puncto R excitetur perpendicularis R Q. Super rectis T R, R Q deſcribantur ſemicirculi T P R, R G Q & ipſis applicentur rectæ T P, R G quæ ſingulæ ſint ipſi R Y

æquales. Iunctis autem rectis R P, Q G: Aio rationem curuæ parabolicæ D A C ad baſim D B C eſſe eamdem quæ eſt dupli quadrati rectæ Q G ad triplum quadratum rectæ R P ideóque eſſe datam. Fiat itaque vt triplum quadratum rectæ R P ad duplum quadratum rectæ Q G ita recta D C ad rectam I H. Recta illa I H quæ data eſt ex conſtructione, æqualis erit curuæ parabolicæ D A C. Quod ſi cum præcedente demonſtratione non conueniat, ab ipsâ erit emendandum.

Si hæc non ſufficiant ad obtinendum à Geometris vt noſtra hæc curua parabolica inter admiranda Geometriæ collocetur, illud fortaſſe ab ipſis quæ mox ſequentur impetrabunt. Quid enim mirabilius quàm ex vnâ hâc curuâ deriuari & formari alias numero infinitas non ſolum ab ipsâ ſed inter ſe ſpecie differentes quæ tamen ſingulæ rectis datis æquales eſſe demonſtrentur? Propoſitio generalis hæc eſt.

Sit in 7. Figurâ, curua noſtra parabolica C M A cuius altitudo A B, ſemibaſis C B & ab eâ curuâ formentur aliæ in infinitum hac ratione vt ductis perpendicularibus ad baſim rectis D M N L, E K I H vtcumque, ſecantibus curuam in punctis M, K, noua curua C N I G ex hac priore formanda ſit eius naturæ vt recta D N ſit ſemper æqualis portioni prioris curuæ nempe C M ipſam reſpicienti; item recta E I ſit æqualis portioni prioriscuruæ C M K, & ſic in omnibus aliis quibuſlibet perpendicularibus. Hæc noua curua C N I G erit diuerſæ à priore ſpeciei. Formetur pariter ab ipſa, tertia curua C L H F in qua rectæ D L, E H ſint ſemper æquales portionibus curuis C N & C N I ſecundæ curuæ. Et à tertia pari ratione formetur 4. à quarta quinta, à quinta ſexta & eo progrediamur in infinitum ordine. Aio

omnes,

omnes, iſtas curuas C N I G, C L H F & reliquas in infinitum perinde aç primam parabolicam C M K A rectis datis æquales eſſe.

Notandum autem iſtas omnes in infinitum curuas eſſe purè Geometricas, nec in illis itaque ad legem illam & ordinem naturæ de quibus initio huius diſſertationis locuti ſumus recurrendum. Licet enim rectæ D N & E I curuis C M & C M K ſupponantur æquales, eædem tamen ipſæ non tam ſuppoſitæ ſunt quàm ex prædictis demonſtratæ eſſe pariter rectis æquales. Dato quippe quolibet puncto D, cum ex præcedentibus detur recta æqualis portioni curuæ C M; ergo recta D N quæ curuæ C M ex conſtructione ponitur æqualis, vt recta verè data non vt æqualis curuæ conſiderari debet, & ſic de reliquis. Curua igitur ſuprà deſcripta C N I G verè Geometrica eſt, quam poſtquam æqualem eſſe rectæ datæ demonſtrauerimus ſequetur tertiam curuam ab eâ formandam nempe C L H F eſſe quoque purè Geometricam & ſic omnes alias in infinitum.

Demonſtratio difficilis non erit ſi prius præmiſerimus generalem quæ huic operi omninò inſeruit propoſitionem.

PROPOSITIO VI.

ESto in Fig. 8. quælibet curua eiuſdem cum præcedentibus naturæ O N R, cuius vertex O, axis vel applicata O V I, eadem enim ſemper eſt demonſtratio, & ab eâ formetur alia curua O A E cuius ea ſit proprietas vt applicatæ ſint æquales portionibus abſciſſis à priore curuâ, exempli gratiâ applicata V A ſit æqualis curuæ O N, ap-

plicata I E ſit æqualis curuæ O R & ſic de reliquis: Ad datum punctum in nouâ hâc curuâ ducetur tangens hoc pacto: Sit datum punctum E, ducatur applicata E I ſecans priorem curuam in R, ducatur recta R C tangens in dicto puncto R priorem curuam & occurrens axi in puncto C, fiat vt R C ad C I ita recta I E ad rectam I B, & iungatur E B. Aio rectam E B tangere nouam curuam E A O in puncto E. Sumpto enim quouis puncto in axe vt V, & ducta applicata V N A quæ ſecet priorem curuam in N, tangentem R C in S, ſecundam curuam in A, rectam verò E B in Y, ſi probauerimus rectam V Y ſemper eſſe maiorem applicata V A, recta E B non ſecabit nouam curuam à parte verticis. Hoc autem facillimè probamus. Recta V A eſt æqualis curuæ O N ſiue differentiæ inter curuas O R, N R: At recta R S eſt minor curua R N per conſectarium primæ propoſitionis, ergo differentia inter curuam O R & rectam R S eſt maior differentia inter eamdem curuam O R & curuam R N; ſed curua V Y eſt æqualis differentiæ inter curuam O R & rectam R S vt mox probabimus, ergo recta V Y occurrens rectæ E B erit maior recta V A occurrente curuæ O A E, vnde patet omnia puncta rectæ E B verſus verticem eſſe extra curuam; ideóque recta E B curuam ab eâ parte non ſecabit. Immò nec inferius. Sumatur enim quoduis punctum vt H à quo ducatur applicata H Z ſecans priorem curuam in D, tangentem R C productam in F, ſecundam curuam in Z, & rectam E B productam in Q. Si probemus rectam H Q in quocumque caſu maiorem eſſe rectâ H Z, patebit omnia puncta rectæ E B etiam inferius ſumpta extra curuam iacere, vnde patebit dictam rectam E B tangere ſecundam curuam in dicto puncto E. Recta H Z eſt

Digitized by Google

æqualis ex conſtructione curuæ O D, hoc eſt ſummæ curuarum O R, R D. Cum autem recta R F ſit portio tangentis R E inferius ſumpta erit ex conſectario primæ huius recta R F maior curua R D, ideóque ſumma curuæ O R & rectæ R F erit maior ſumma eiuſdem curuæ O R & curuæ R D; ſumma autem curuæ O R & rectæ R F eſt æqualis vt mox probabimus rectæ H Q; ſummæ verò curuarum O R, R D eſt æqualis rectæ H Z ex conſtructione, ergo recta H Q ſemper & in omni caſu maior erit applicatâ H Z. Ideóque recta E B in dicto puncto E tanget ſecundam curuam. Probandum autem reliquimus differentiam curuæ O R & rectæ R S æquari rectæ V Y, ducatur recta E M parallela axi & occurrat rectæ V Y productæ in M. Ex conſtructione eſt vt E I ad I B ita R C ad C I, ſed vt E I ad I B ita Y V ad V B, & ita Y M, ad M E, vt autem R C ad C I ita R S ad V I, ergo vt Y M ad M E, ita R S ad V I. Sunt autem rectæ M E, V I æquales propter parallelas, ergo rectæ Y M, R S erunt æquales. Sunt autem æquales etiam rectæ E I, V M, ergo differentia inter rectas E I & M Y erit recta V Y. Sed recta E I ex conſtructione æquatur curuæ O R ergo differentia inter curuam O R & rectam M Y ſiue ipſi æqualem R S æquabitur rectæ Y V. Quod primò erat probandum. Nec diſſimili ratiocinio procedet demonſtratio infra applicatā E I, ductâ enim rectâ E P parallelâ axi, probabimus rectam Q P æqualem eſſe rectæ R F. Eſt enim vt E I ad I B hoc eſt Q H ad H Z hoc eſt Q P ad P E ita recta R C ad C I hoc eſt R F ad I H. Sunt autem æquales P E, I H, ergo & rectæ Q P, R F. Recta autem H Q æquatur rectis H P, P Q, quarum prior H P æquatur rectæ I E ſiue curuæ O R, poſterior autem Q P æquatur ex demonſtratis rectæ R F. Ergo

ſumma curuæ O R & rectæ R F eſt æqualis rectæ H Q quod ſecundo loco fuit probandum. Patet itaque rectam E B in puncto E ſecundam curuam tangere. Quod erat demonſtrandum.

Sit iam in 9. Fig. curua noſtra parabolica G K A cuius altitudo A E, ſemibaſis G E, rectum latus A C, cuius nona pars, vt ſuprà ſit C D & recta A C bifariam ſecetur in B: A priori hac curuâ formetur alia verſus punctum G quæ ſit G N S occurrens axi prioris in S, & nouæ huius curuæ proprietas hæc ſit vt ſumpto quouis puncto vt F, & erectâ perpendiculari F K N occurrente duabus curuis in K & N, recta F N ſit ſemper æqualis curuæ prioris portioni G K. Ducatur parallela baſi K M, & ad idem punctum K ducatur recta T K H tangens priorem & occurrens axi in T & baſi in H. Per punctum verò N in ſecundâ curuâ ducatur tangens R N X I occurrens baſi in I, & à punctis quibuſlibet in eâ ex vtraque parte ſumptis vt R & X demittantur in baſim perpendiculares X Y & R V. Ex præcedentibus patet quadratum tangentis K T in priore curua ad quadratum F E, ſiue quadratum K L ad quadratum F V eſſe ſemper vt rectam F E vna cum recta A B ad ipſam A B. Sed vt quadratum K T ad quadratum FE ſiue ad quadratum K M ita quadratum K H ad quadratum H F propter parallelas, ergo quadratum K H eſt ad quadratum H F vt recta FE vna cum A B ad A B. Vt autem quadratum K H ad quadratum H F ita ex præcedente propoſitione quadratum rectæ F N ad quadratū rectæ F I. (Cum enim cætera ex vi illius propoſitionis ſint proportionalia, erunt proportionalia & quadrata.) Ergo quadratum N F ad quadratum FI eſt vt recta F E vnâ cum A B ad A B, & componendo quadrata duo N

F & F I ſiue vnicum quadratum N I erit ad quadratum F I vt F E vna cum A B bis ad A B. Sed vt quadratum N I ad quadratum F I ita quadratum R N ad quadratum rectæ F V ex vna parte, & ita quadratum rectæ N X ad quadratum rectæ F Y ex altera. Ergo ſumpto quouis puncto in ſecunda hac curua vt N, eſt ſemper vt quadratum portionis tangentis ad illud punctum ductæ ex alterutra parte ad quadratum portionis baſis ipſi oppoſitæ, ita ſumma rectæ F E vna cum A B ad A B. Si igitur baſi G E ponatur in directum recta E O rectæ A B dupla, & ad punctum O erigatur perpendicularis O P ipſi A B æqualis, erit ſemper vt quadratum portionis N R in hâc ſecundâ curuâ ad quadratum portionis baſis F V, vel vt quadratum portionis tangentis N X ad quadratum portionis baſis F Y, ita recta F O ad rectam O P.

His ita ſe habentibus, patet cæteras in infinitum curuas modo quem ſuprà indicauimus deſcribendas eius eſſe naturæ, vt in 3. v. g. quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis baſis ipſi oppoſitæ, ſit vt portio baſis F E initium ſumens à puncto F in quod cadit perpendicularis à puncto contactus in baſim demiſſa, vnâ cum rectâ A B ter ſumptâ ad ipſam A B. In 4. curuâ erit vt quadratum portionis tangentis ad quadratum portionis baſis ipſi oppoſitæ vt recta F E vnâ cum A B quater ſumpta ad ipſam A B. Et ſic de reliquis in infinitum. Eadem enim ſemper demonſtratio, vt euidens eſt, in omnibus caſibus locum habet.

Nec difficilis hoc ſuppoſito ad theorema generale erit aditus.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITT. EMANUELE

Digitized by Google

PROPOSITIO VII.

ESto in Fig. 10. curua noſtra parabolica E A, cuius axis A I, ſemibaſis I E. Ab eâ formetur ſecunda curua E X Y Z θ cuius ea ſit natura, vt ſupra diximus, vt quæuis applicata G X ſit æqualis portioni prioris curuæ ab applicata illa, ſeu mauis vocare perpendicularem, abſciſſæ. Diuidatur baſis in quotlibet partes æquales E F, F G, G H, H I & ducantur à punctis F, G, H perpendiculares ſecantes nouam hanc ſecundam curuam in punctis X, Y, Z. Sit prioris curuæ rectum latus A D, à quo abſcindatur nona pars C D, & reliqua A C biſecetur in B. Rectæ A B bis ſumptæ fiat æqualis recta I K quæ ſit in directum baſi, & ad punctum K erigatur perpendicularis K L æqualis rectæ A B. Per punctum K & axem *K E* intelligatur deſcribi parabola ſimplex ſiue Archimedea cuius rectum latus *K L* & ſit illa parabola R M O Q. A punctis E, F, G, H, I ducantur perpendiculares ad axem & occurentes huic parabolæ in punctis Q, P, O, N, M. Ex corollario præcedentis cum curua E X θ ſit ſecunda curua à priore deriuata ſeu formata ea ratione quam iam ſæpiùs explicuimus; ſequitur vt ſumpto in ea quolibet puncto vt Y, & ducta portione tangentis Y T eſſe vt quadratum Y T ad quadratum G H ita rectam K *G* ad rectam *K L*: ſed vt recta G K ad rectam *K L* ita ſingulis in rectam *K L* ductis rectangulum *G* K *L* ad quadratum K *L*: Ex natura autem parabolæ ſimplicis rectangulum *G* K *L* æquatur quadrato applicatæ G O; ergo quadratum Y T eſt ad quadratum G H vt quadratum G O ad quadratum *K L*, ideóque vt recta Y T ad rectam G H ita recta G O ad rectam K *L*: re-

ctangulũ itaque ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis, rectangulum ergo ſub G O, in G H æquatur rectangulo ſub K L in *Y T*. Si igitur ducantur aliæ tangentes E R, X S & Z V occurrentes perpendicularibus in punctis R, S, V probabitur ſimiliter rectangulum ſub Q E in E F æquari rectangulo ſub K L in E R, item rectangulum ſub P F in F G æquari rectangulo ſub K L in X S & ſic de reliquis in infinitum, vnde tandem per abductionem ad methodum Archimedeam pari quod in 4. propoſitione huius indicauimus artificio, conficietur & concludetur ſegmentum parabolicum E Q M I æquari rectangulo ſub K L in ſecundam curuam E X θ ſicut & ſingula ſegmenta parabolica, E Q P F v. g. rectangulo ſub K L in portionem curuæ E X, vel ſegmentum E Q O G rectangulo ſub K L in portionem curuæ E X Y in infinitum. Dantur autem in rectilineis hæc omnia ſegmenta parabolica ex vi quadraturæ parabolæ ab Archimede demonſtratæ; & datur etiam recta K L. Ergo dantur tam tota ſecunda curua E X ϑ, quàm ipſius portiones E X, E Y &c. per rectas perpendiculares ad puncta F G data abſciſſæ.

Ad tertiæ curuæ cum rectâ datâ æqualitatem, ſimilis fiet conſtructio, niſi quod recta I K ponetur tripla rectæ A B. In 4. curuâ eadem I K ponetur quadrupla rectæ A B. Et tandem generalis inter omnes iſtas in infinitum curuas à priore deriuandas ita ſtatuetur ratio: erunt nempe ſingulæ inter ſe vt ſegmenta parabolica eiuſdem parabolæ, & eiuſdem altitudinis quæ à vertice parabolæ diſtabunt per rectum latus toties ſumptum quotæ erunt in ordine curuæ inter ſe comparandæ.

Exempli g. ſit in 11. Fig. curua noſtra parabolica E M A,

cuius axis A F, ſemibaſis E F, rectum latus A D, à quo dempta nona parte C D, reliqua A C biſecetur in B. Et à prima illa curua formetur ſecunda E O S eius naturæ vt ſumpto quolibet puncto in baſe N recta N O perpendicularis ad baſim & occurrens curuis in M & O, ſit æqualis portioni prioris curuæ E M. A ſecunda formetur tertia E V R in qua recta N V ſit æqualis portioni ſecundæ curuæ E O. Item à tertia E V R formetur quarta E X L in qua recta N X ſit æqualis portioni tertiæ curuæ E V. Exponatur ſeparatim parabola ſimplex ſiue Archimedea cuius axis infinitus G K Q Y, vertex G, rectum latus G H æquale rectæ A B. Quæritur ratio verbi gratia 4. curuæ E X L ad primam E M A. Quia prior ex iſtis eſt 4. ordine, ab axe abſcindenda eſt G Y quadrupla recti lateris G H, deinde ponenda ipſi in directum recta Y ϑ æqualis ſemibaſi E F & ducendæ applicatæ rectæ Y T, ϑ λ. Quia verò poſterior ex duabus comparandis eſt prima ordine, abſcindenda eſt ab axe recta G K recto lateri ſemel tantùm æqualis, deinde ipſi ponenda in directum recta K Q ſemibaſi etiam E F æqualis & ducendæ applicatæ K I, Q P. Erit ex demonſtratis & canone generali ab illis deducto, vt ſegmentum parabolicum Y T λ ϑ ad ſegmentum parabolicũ K I P Q, ita quarta curua E X L ad primam E M A. Sed ratio ſegmentorum parabolicorum inter ſe data eſt ex Archimede, ergo & ratio curuarum inter ſe data erit; data eſt autem prima ex demonſtratis, datur igitur & quarta, & ipſi rectæ datæ æqualis aſſignari poteſt & perpetua illa ratio remota, ſi libeat, parabola, ad phraſim Geometricam ope regulæ tantùm & circini accommodari. Quod autem de totis iam probatum & in canonem deductum eſt,

idem

Digitized by Google

idem de portionibus illarum curuarum inter ſe comparandis contingere beneficio ſegmentorum parabolicorum portiones ſemibaſis ipſis curuarum portionibus oppoſitas pro altitudine habentium quis non videt?

Nihil autem nec de ſolidis ex dictis in infinitum curuis, conficiendis, nec de ſuperficiebus ipſorum curuis, nec de centris grauitatum aut linearum iſtarum, aut dictorum ſolidorum, aut ſuperficierum curuarum adiungimus, cum methodi hac de re generales à ſummis & inſignibus Geometris iam vulgatæ iſta omnia poſt cognitam ſpecificam curuæ datæ proprietatem ignorari non ſinant, licet in multis caſibus propriam ab vnoquoque adiungi operi induſtriam non inutile futurum exiſtimemus.

Sed antequàm manum de tabula tollam ſuccurrit examinanda ſequens propoſitio.

Sit in Fgura 12. curua noſtra parabolica C O A, cuius vertex A, axis A B, ſemibaſis C B. Ab ea formentur aliæ curuæ infinitæ modo quem iam explicuimus, non ex parte baſis vt ſuprà, ſed ex parte verticis. Sint illæ curuæ à prima effingendæ A I F, A G E &c. in infinitum ea conditione vt ſumpto quouis puncto in axe D & ducta ad axem perpendiculari D O I G ſecante curuas in punctis O, I, G, recta D I ſit in ſecunda curua ſemper æqualis portioni primæ curuæ A O, item recta D G in tertia curua ſit ſemper æqualis portioni ſecundæ curuæ A I, & ſic in infinitum. Huiuſmodi omnes curuæ non ſolum ſpecie inter ſe & à prima A O C, different ſed etiam ab iis quas ex parte baſis ſuprà effinximus. Quæritur ergo an curuæ illæ omnes A I F, A G E &c. ſic in infinitum effingendæ, da-

ō

tis rectis, an verò aliis curuis ſint æquales? Inquirant illud Geometræ, & miraculum augeri experientur.

Sanè ſi methodi quibus vtuntur ad dimenſionem curuarum, ſint generales & ſufficientes, quod ipſis affirmantibus in dubium reuocare non auſim, primo ſtatim obtutu rem factam habebunt, & à labore ſuperfluo Geometram iam fatigatum liberabunt.

Si quid autem in ſuperioribus demonſtrationibus conciſum nimis inuenerint, id aut ſuppleant, rogo, aut condonent.

Pag. 4. lin. 1. ſcribe A H M G. pro A H K G.
Pag. 22. lin. 4. ſcribe F X pro G X.

Digitized by Google

Digitized by Google

APPENDIX

AD DISSERTATIONEM DE LINEARVM curuarum cum lineis rectis comparatione.

Vt vltimæ quam in Diſſertatione propoſuimus quæſtioni ſatisfiat, præmittendæ videntur propoſitiones ſequentes.

PROPOSITIO PRIMA.

SINT in figurâ primâ duæ curuæ A I F, 3 Z 8, quarum axes A E, 3 7 ſint inter ſe æquales. Ducantur autem ad axes applicatæ quotlibet quæ in vtrâque figurâ æquali à vertice interuallo diſtent. Sint exempli gratiâ applicatæ prioris B M, C I, D H, E F : poſterioris verò applicatæ ſint 4 t, 5 2, 6 9, 7 8, & ſit recta A B quæ deſignat interuallum applicatæ B M à vertice, æqualis rectæ 43 quæ deſignat interuallum etiam applicatæ 4 t à vertice. Sit pariter C A, æqualis 53. Item D A æqualis 63, denique E A, quod iam ſuppoſueramus, æqualis 73. Si ſingulæ ex applicatis ſint ſemper ad abſciſſas per tangentes ab axe, in ratione correlatarum, hoc eſt ſi ductis tangentibus ad puncta F, H, I, M, ex vnâ parte, & ad puncta 8, 9, Z, T, ex alterâ ſemper contingat vt applicata F E verbi gratia ſit ad rectam K E quam tangens F K abſcindit ab axe, in eadem ratione, quę eſt applicatæ 8 7 ad rectam 7 2 quam tangens 8 2 ab axe pariter abſcindit. Item applicata D H ſit ad abſciſſam ab axe per tangentem quæ ducitur ad punctum H vt applicata 69 ad abſciſſam ab axe per tangentem ad

punctum 9. ductam & ſic de reliquis. Aio duas iſtas curuas A F, 3 z 8. eſſe inter ſe æquales, imò & ſimiles ideóque eaſdem, & applicatas vnius figuræ applicatis alterius quæ à vertice æqualiter diſtant eſſe pariter æquales. Ductis enim ad puncta H, I, vt in primâ figurâ portionibus tangentiũ H O, I N, M R, quæ occurrant applicatis in punctis O, N, R. Item ductis portionibus tangentium in ſecundâ figurâ 9 V, Z Y, T X quæ occurrant applicatis in punctis V, Y, X: ex ſuppoſitione vt F E ad E K in primâ figurâ, ita eſt 8 7 ad 7 2 in ſecundâ: ſed anguli ad puncta E & 7 ſunt recti, ergo triangula F E K, 872 ſunt ſimilia: vt ergo F K ad K E, ita 8 2 ad 7 2. Sed vt F K ad K E, ita (productâ applicata D H ad punctum G) recta F G ad rectam D E, & vt 82 ad 72 ita (productâ applicatâ 69 ad punctum P) recta 8 P ad 67. Ergo vt recta F G ad rectam D E, ita recta 8 P ad 67. Sunt autem rectæ D E, 67, æquales, cùm rectæ E A & 73, item rectæ D A & 63 ſint inter ſe æquales: ergo & portiones tangentium F G, 8 P erunt inter ſe æquales. Similiter probabimus portionem tangentis H O æqualem eſſe portioni tangentis 9 V, item portionem tangentis I N æqualem eſſe portioni tangentis Z Y, denique portionem tangentis M R æqualem eſſe portioni tangentis T X. Cum ergo ſeries tangentium in primâ figurâ ſit æqualis ſeriei tangentium in ſecundâ per abductionem ad impoſſibile more Archimedeo facilè concluditur curuam A I F, curuæ 3 z 8 æqualem eſſe, quod primo loco fuit probandum, imò & pariter concluditur portiones curuæ correlatas eſſe inter ſe æquales, portionem nempe F H portioni 8 9, portionem curuæ H I portioni 9 Z, & ſic de reliquis. Supereſt probandum applicatas pariter vnius figuræ applicatis alterius eſſe æquales. Cum ex ſuppoſi-

Digitized by Google

tione applicatæ ſint ſemper ad abſciſſas ab axe per tangentes in eâdem vtrobique ratione, ergo anguli G F E, P 8 7 qui fiunt ab interſectione tangentium & applicatarum erunt inter ſe æquales: Item anguli O H D, & V 9 6: Item anguli N I C, & Y Z 5: Denique anguli R M B, & X T 4. Cum ergo portiones omnes prioris curuæ F H, H I, I M, M A, ſint æquales portionibus poſterioris 8 9, 9 z, z T, T 3 ſingulæ ſingulis, imò & earumdem portionum ſit eadem vtrobique inclinatio (inclinationem enim curuarum metiuntur tangentes quæ in vtráque figurâ æquales ſemper, vt probauimus, conficiunt angulos) ergo curuæ A M I H F, 3 T Z 9 8, non ſolùm ſunt inter ſe æquales, ſed etiam ſimiles: Vnde ſi intelligantùr altera alteri ſuperponi, congruent omninò, ideoque non ſolum axes ſed applicatas æquales aut eaſdem potius habebunt. Quòd ſecundo loco fuit demonſtrandum.

PROPOSITIO SECVNDA.

SINT duæ in ſecuudâ figurâ parabolæ eiuſdem naturæ A O D, X I G, quarum axes ſint A C, X F, ſemibaſes D C, G F, & ſit verbi gratia vt cubus D C ad cubum applicatæ B O, ita quadratum C A ad quadratum B A: & ſimiliter vt cubus G F ad cubum applicatæ I Y, ita quadratum F X ad quadratum Y X. (Licet enim propoſitio ſit generalis à parabolâ noſtrâ non diſcedimus) ſit autem vt axis vnius ad ſemibaſem, ita etiam axis alterius ad ſemibaſem nempe vt axis C A ad ſemibaſem D C, ita axis X F ad ſemibaſem G F. Aio duas haſce parabolas eſſe inter ſe in ratione axium, vel ſemibaſium, hoc eſt curuam A O D eſſe ad curuam X I G vt eſt axis A C ad axem X F, vel vt ſemibaſis C D ad ſemibaſem G F. Hæc quippe duæ ratio-

nes ex ſuppoſitione ſunt eædem. Demonſtratio eſt in promptu. Secetur enim vterque axis in quotlibet partes æquales, duas tantùm ad vitandam confuſionem & prolixitatem aſſumemus. Secetur ergo bifariam axis A C, in in B, & axis F X in Y, & ductis applicatis B O, Y I, ducantur ad puncta D, O, tangentes D N, O M quarum prior occurrat applicatæ B O in puncto E, poſterior verò rectæ A V applicatis parallelæ in puncto V. Item in altera figura ducantur ad puncta G, I, tangentes G K, I S, occurrentes applicatæ Y I & ipſi parallelæ X R in punctis H, R: ex ſuppoſitione eſt vt D C ad C A, ita G F ad F X. Sed ex naturâ iſtius paraboles recta C A eſt ad C N abſciſſam per tangentem vt 2 ad 3. Item recta F X eſt etiam ad rectam F K per tangentem abſciſſam vt 2 ad 3. Ergo ex æquo eſt vt D C ad C N ita G F ad F K. Sunt ergo æquiangula triangula D N C, G K F. Ergo vt D N ad N C, ita G K ad K F. Sed vt D N ad N C, ita D E ad C B, & vt G K ad K F, ita G H ad F Y. Ergo vt D E ad C B ita G H ad F Y. Similiter probabitur eſſe vt O V ad B A, ita I R ad X Y. Cum ergo portiones axium A B, B C ex vna parte, & X Y, Y F ex altera ſint inter ſe æquales, ergo vt omnes tangentium portiones D E, O V ad totum axem A C ita omnes tangentium portiones G H, I R ad totum axem X F. Omnes autem portiones tangentium D E, & O V & plures, ſi opus ſit, beneficio abductionis ad impoſſibile vt iam ſæpius & indicatum & probatum eſt deſignant totam curuam D O A: Item omnes portiones tangentium G H, I R & plures etiam, ſi opus ſit, deſignant totam curuam G I X. Ergo vt curua D O A ad axem A C, ita curua G I X ad axem X F: Et viciſſim & conuertendo, erit axis A C ad axem X F, ſiue baſis D C ex ſuppoſitione ad baſim G F, vt

curua D O A ad curuam G I X. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO TERTIA.

Esto in 3. Figura curua A O cuius axis A C, baſis C O, & ab ea intelligatur formari alia curua eiuſdem & axis & verticis in quâ applicatæ ſint ſemper in ratione applicatarum prioris curuæ, ſit nempe vt baſis C O, ad baſim C V, ita applicata B P prioris curuæ ad applicatam B R poſterioris curuæ, & ita applicata D E ad applicatam D N & ſic in infinitum. Si ad punctum quodlibet prioris curuæ vt O ducatur tangens O H cum axe conueniens in puncto H, & continuetur C O donec occurrat ſecundæ curuæ in V. A I O rectam quæ puncta V & H coniungit tangere ſecundam curuam, & ſemper contingere vt tangentes correlatæ in vtraque curua ad idem punctum axi occurrant. Ducantur enim applicatæ B P R, D E N, occurrentes curuis in punctis P, R, E, N, & rectis O H, V H productis, in punctis Q, S, F, M. Si probauerimus rectam B S ſupra rectam C V ductam, ſemper maiorem eſſe rectâ B R: item rectam D M inferiùs ductam eſſe etiam ſemper maiorem applicatâ D N, patebit rectam M V S H tangere ſecundam curuam in puncto V. Ex conſtructione vt C O ad C V ita eſt applicata B P ad applicatam B R. Sed propter parallelas C O V, B Q S quæ ſecantur à tribus rectis C H, O H, V H ad idem punctum vergentibus, eſt etiam vt C O ad C V ita recta B Q ad rectam B S, ergo vt recta B P ad rectam B R, ita eſt recta B Q ad rectam B S, & viciſſim vt recta B P ad rectam B Q, ita eſt recta B R ad rectam B S. Cùm autem recta O Q H tãgat priorem curuam in puncto O, recta B Q erit maior recta B P, ergo etiam recta B S erit maior recta B R. Quod primo loco

fuit probandum. Nec diſſimilis in applicata inferius ſumpta erit demonſtratio. Ex ſuppoſitione enim eſt vt C O ad C V ita D E ad D N, & propter parallelas eſt etiam vt C O ad C V ita D F ad D M, ergo vt D E ad D N ita eſt D F ad D M; eſt autem D E minor D F, ergo & D N ipſa D M minor erit. Recta itaque M V S H in puncto V tangit ſecundam curuam.

Lemma ad id quod ſequitur.

SIT in 4. figura, parabole noſtra G I A cuius axis A E, ſemibaſis E F G tangens G H. Conſtituatur ad eundem axem A E alia parabole eiuſdem naturæ F N A cuius ſemibaſis E F ſit poteſtate ſubdupla prioris ſemibaſis E G, & ſemper contingat applicatam quamuis, vt N O, applicatæ O I ad priorem curuam eſſe pariter poteſtate ſubduplam. Sit rectum prioris G I A paraboles latus recta A D, cuius nona pars ſit C D, & reliqua A C biſecetur in B. Ducatur ad ſecundam parabolen tangens ad punctum F recta F H. quæ in eodem puncto H cum axe conueniet non ſolùm ex vi propoſitionis præcedentis, ſed quia ex natura iſtarum parabolarum, in vtraque, recta E A eſt ad rectam E H vt 2 ad 3. ex ſuperius demonſtratis. Aio quadratum F E eſſe ad quadratum E H vt eſt dimidia rectę A B ad rectam E G. Iam enim in propoſitione tertia diſſertationis demonſtratum eſt quadratum G E eſſe ad quadratum E H vt eſt recta A B ad rectam E G. Ergo ſumptis antecedentium dimidiis erit vt quadratum E F quod ſuppoſuimus eſſe dimidium quadrati G E, ad quadratum E H ita dimidia rectæ A B ad rectam G E. Probabimus pariter ſi recta F E ſit poteſtate ſubtripla rectæ G E, hoc eſt ſi quadratum F E ſit ſubtriplum quadrati G E, eſſe vt quadratum

Digitized by Google

F E ad quadratum E H,ita tertiam partem rectæ A B ad rectam G E. Et ſic de ſubquadruplo,ſubquintuplo & reliquis in infinitũ. Cum autem in ratione ſubdupla probauerimus eſſe vt quadratum E F ad quadratum E H ita dimidiam A B ad rectam G E, ergo componendo erit vt ſumma quadratorum F E, E H, ſiue vt vnicum quadratum F H ad quadratum E H ita dimidia A B vnà cum G E ad ipſam GE.

Si vero recta E F ſit poteſtate ſubtripla rectæ G E, erit vt quadratum F H ad quadratum E H ita tertia pars A B vnà cum G E ad ipſam G E.

Si recta E F ſit poteſtate ſubquadrupla rectæ G E, erit vt quadratum F H ad quadratum E H ita quarta pars A B vnà cum E G ad ipſam E G, & ſic in infinitum, & in quacunque applicata idem continget.

PROPOSITIO IV.

HIs præmiſſis theorema generale haud difficulter detegimus.

Sit in figura 5. parabole noſtra A C cuius axis A B, ſemibaſis B C, & ab ea formentur aliæ in infinitum curuæ A D, A E, A F quarum ea ſit proprietas vt ducta qualibet applicata B C D E F, recta B D ſit ſemper æqualis priori curuæ C A, recta B E æqualis ſecundæ curuæ A D, recta B F æqualis tertiæ curuæ A E, idque ſemper in omnibus ad illas curuas applicatis contingat. Aio omnes illas & ſingulas in infinitum curuas A D, A E, A F &c.eſſe ſemper datis lineis rectis æquales, perinde ac curuas quas in diſſertatione, diuerſa & diſſimili ex parte baſis methodo conſtruximus.

Theorema generale ita ſe habet. Exponatur ſeparatim eadem parabole O 3 M æqualis omninò & ſimilis ipſi A C,

Digitized by Google

cuius ideo axis M N æqualis eſt axi A B, & ſemibaſis O N, ſemibaſi B C. Separatim enim ad vitandam confuſionem figuram conſtruendam duximus. Fiat recta N P rectæ N M poteſtate dupla, recta N Q eiuſdem N M poteſtate tripla, recta N R eiuſdem N M poteſtate quadrupla, & ſic in infinitum. Manente autem eadem ſemibaſi O N, conſtruantur parabolæ per vertices P, Q, R eiuſdem cum parabola O 3 M vel A C naturæ, & ſint illæ O 4 P, O 5 Q, O 6 R &c. Aio parabolam O 4 P curuæ A D eſſe æqualem; parabolam vero O 5 Q curuæ A E eſſe æqualem; denique parabolam O 6 R curuæ A F eſſe æqualem, & ſic in infinitum. Cum in noſtris parabolis O 4 P, O 5 Q, O 6 R ducta applicata 2 3 4 5 6, ſit ſemper ex natura dictarum parabolarum vt cubus rectæ O N ad cubum rectæ 4 2 ita quadratum rectæ ſiue axis N P ad quadratum P 2: item vt cubus O N ad cubum 5 2 ita quadratum N Q ad quadratum Q 2: denique vt cubus O N ad cubum 6 2 ita quadratum N R ad quadratum R 2. Patet ex prædemonſtratis in diſſertatione, ſingulas ex iſtis parabolis, rectis datis æquales eſſe, ergo poſt demonſtrationem theorematis noſtri generalis conſtabit ſingulas quoque ex curuis A D, A E, A F rectis datis æquales eſſe.

Demonſtratio autem theorematis generalis hæc eſt. Sit rectum paraboles iſtius latus recta A S, à qua ſi demas nonam partem S Y, reliquam biſeca in puncto V & ad puncta C, D, E ducantur tangentes ad nouas curuas C I, D H, E G quæ occurrant axi in punctis I, H, G. Ex demonſtratis in tertia diſſertationis propoſitione quadratum B C eſt ad quadratum B I vt recta A V ad rectam B C. Et componendo quadratum C I eſt ad quadratum B I vt recta A V vnà cum B C ad B C. Sed ex propoſitione ſexta Diſſertationis

nis, vt eſt quadratum tangentis C I ad quadratum B I, ita quadratum rectæ B D ſe habet ad quadratum rectæ B H, quam abſcindit tangens D H : Ergo vt quadratum B D ad quadratum B H, ita recta A V vnà cum B C ad B C : Et componendo vt quadratum tangentis D H ad quadratum B H, ita recta A V vnà cum B C bis ſumptâ ad ipſam B C. Sed vt quadratum tangentis D H ad quadratum H B, ita ex eadem diſſertationis propoſitione quadratum B E eſt ad quadratum rectæ B G à tangente E G abſciſſæ : ergo vt quadratum rectæ B E ad quadratum rectæ B g, ita eſt recta A V vnà cum B C bis ſumpta, ad ipſam B C. Similiter probabimus ſi ducatur ad curuam E A applicata Z T K, ſecans curuam A C in T, & intelligatur ad punctum *K* duci tangens ad curuam A K E, eſſe pariter vt quadratum K Z ad quadratum quam tangens per punctum K ducta ab axe abſcindit, ita rectam A V vnà cum Z T bis ſumpta ad ipſam Z T. Et ſic ſemper continget.

Exponatur ſeparatim ad vitandam confuſionem eadem curua A K E, quæ ſit in figura ſeparata $\beta\,\phi\,\lambda$. Baſis $\lambda\,\delta$ ſit itaque æqualis baſi E B, tangens $\lambda\gamma$ tangenti E G, axis $\delta\beta$ axi B A; abſciſſa per tangentem ab axe $\delta\gamma$, abſciſſæ B G; applicata $\nu\phi$, applicatæ Z K. A B hac curua $\lambda\,\phi\,\beta$ formetur alia ipſa minor $\theta\,\pi\,\beta$, ea conditione vt applicatæ nouæ iſtius curuæ ſint ſemper ſubduplæ poteſtate applicatarum prioris, verbi gratia recta $\delta\theta$ ſit ſubdupla poteſtate rectæ $\delta\lambda$, Item applicata $\nu\pi$ ſit ſubdupla poteſtate rectæ $\nu\phi$; & ſic de reliquis. Ducantur in hac noua curua tangentes ad puncta θ, π rectæ $\theta\gamma$, $\pi\,7$. Ex præcedente tertia propoſitione patet tangentes $\theta\gamma$, $\lambda\gamma$, ad idem punctum γ cum axe concurrere. Item tangentes ad puncta ϕ, π ductas, ad idem etiam punctum verbi gratia 7 cum

axe concurrere, cùm pplicatæ vtriuſque figuræ ſint in eadem ſemper inter ſe ratione.

Exponatur adhuc ſeparatim parabole eiuſdem cum parabolis O M, O P &c. naturæ, cuius axis 9 8 ſit æqualis axi M N, ſiue A B, ſiue $\beta\delta$; ſemibaſis autem 8 X ſit ſubdupla poteſtate ſemibaſeos N O, ſiue B C. Et ſit illa X 11 9, à qua formetur alia 9 12 ψ, cuius idem ſit axis 9 8, applicata verò 8 ψ ſit æqualis curuæ X 11 9: item applicata 10 11 12 ſit æqualis curuæ 11 9; & ſic de reliquis.

Probandum primò curuas $\theta\pi\beta$ & ψ 12 9, eſſe eaſdem, hoc eſt omninò æquales, & ſimiles. Quod ſic demonſtrabitur. Probauimus quadratum B E eſſe ad quadratum B G, ſiue quadratum $\lambda\delta$ ad quadratum $\delta\gamma$, vt rectam A V vnà cum C B bis ſumpta ad rectam C B: Ergo ſumptis antecedentium dimidijs, cùm poſuerimus rectam $\theta\delta$ eſſe poteſtate ſubduplam rectæ $\delta\lambda$, quadratum rectæ $\theta\delta$ erit dimidium quadrati $\lambda\delta$, ideóque vt quadratum $\theta\delta$ ad quadratum $\delta\gamma$, ita dimidia A V vnà cum C B erit ad ipſam C B. Similiter probabimus in alia qualibet applicata vt $\pi\nu$, eſſe quadratum $\pi\nu$ ad quadratum ν 7 vt dimidiam A V vnà cum Z T ad ipſam Z T; & ſic de reliquis. Diſquirendum iam an eadem proprietas curuæ ψ 12 9 conueniat: quod ita fiet. In curua X 11 9 cuius ſemibaſis X 8 eſt poteſtate ſubdupla ſemibaſis B C, & axis 8 9 æqualis axi A B, ex lemmate ſuperiori ductis tangentibus ad puncta X, ψ rectis X ρ, ψ σ quadratum X 8 eſt ad quadratum 8 ϱ vt dimidia rectæ A V ad rectam C B (recta enim X 8 eſt poteſtate ſubdupla rectæ C B) Ergo componendo quadratum X ϱ eſt ad quadratum 8 ϱ, vt dimidia A V vnà cum C B ad ipſam C B. Similiter ſi intelligatur recta 9 10 æqualis rectæ A Z, hoc eſt ſi pun-

ſta 10 & Z æqualiter à vertice diſtent, quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ erit ad quadratum abſciſſæ ab axe, vt dimidia A V vnà cum recta Z T ad ipſam Z T. Sed vt quadratum X ϱ ad quadratum 8 ϱ, ita ex propoſitione ſexta diſſertationis eſt quadratum applicatæ ψ 8 ad quadratum à tangente abſciſſæ 8 σ, & ſimiliter vt quadratum tangentis ad punctum 11 ductæ ad quadratum abſciſſæ ab axe, ita quadratum applicatæ 12 10 ad quadratum abſciſſæ ab axe per tangentem ad punctum 12 ductam: Ergo vt quadratum ψ 8 ad quadratum 8 σ, ita dimidia A V vnà cum B C ad B C. Sed in alia figura probauimus quadratum applicatæ $\theta\,\delta$ eſſe ad quadratum abſciſſæ à tangente $\delta\gamma$, vt eſt dimidia A V vnà cum B C ad C B: Ergo in duabus curuis ψ 12 9, $\theta\pi\beta$ erit vt ψ 8 ad abſciſſam 8 σ, ita applicata $\theta\,\delta$ ad abſciſſam $\delta\gamma$. Et in omnibus aliis punctis idem ſemper continget, & eodem modo probabimus, nempe applicatam verbi gratia 10 12. eſſe ad abſciſſam à tangente ad punctum 12 ducta, vt eſt $\pi\nu$ ad $\nu\gamma$, & ſic de reliquis. Per primam itaque propoſitionem huius appendicis cum curuæ 9 12 ψ, $\theta\pi\beta$, habeant eumdem axem & applicatæ ſint ad abſciſſas ab axe per tangentes, vtrobique in eadem correlatarum ratione, illæ curuæ erunt inter ſe æquales, & ipſæ etiam ipſarum ſemibaſes, & omnes ſimiliter applicatæ à vertice æquidiſtantes. Ex conſtructione autem ſemibaſis ψ 8 eſt æqualis curuæ X 11 9: Ergo curua X 11 9 eſt æqualis rectæ $\theta\,\delta$. Recta autem $\theta\,\delta$ eſt poteſtate ſubdupla rectæ $\delta\lambda$ ex conſtructione: Ergo curua parabolica X 11 9 eſt poteſtate ſubdupla rectæ $\delta\lambda$: Recta autem $\delta\lambda$ eſt æqualis rectæ B E, & recta B E ſuppoſita eſt in conſtructione curuarum à primaria A C deriuatarum æqualis eſſe curuæ A D: Ergo parabola X 11 9 eſt ſubdupla poteſta-

Digitized by Google

te curuæ A D. Sed eadem curua X 11 9 eſt ſubdupla poteſtate parabolæ O 4 P ; baſis enim X 8 eſt facta poteſtate ſubdupla baſeos B C ſiue N O, & ſimiliter axis 8 9 ſiue A B, ſiue N M eſt poteſtate ſubduplus axis N P : Cùm ergo parabolæ O 4 P, X 11 9 ſint eiuſdem naturæ, & tam axis quàm baſis parabolæ X 11 9 ſint poteſtate ſubduplæ axis & baſis parabolæ O 4 P: Ergo & ipſa parabola X 11 9 ex propoſitione ſecunda huius appendicis erit ſubdupla parabolæ O 4 P. Cum ergo vt iam probauimus eadem parabola X 11 9 ſit ſubdupla tam parabolæ O 4 P, quàm curuæ A D ; curua A D , & ipſa parabola O 4 P erunt inter ſe æquales ; quod erat demonſtrandum. Nec diſſimili ad probandum curuam A E æqualem eſſe parabolæ O 5 Q, vtendum artificio.

Cum enim quadratum B E eſſe ad quadratum B G vt eſt recta A V vnà cum B C bis ſumpta ad ipſam B C, probatum fuerit ; ergo componendo & vlterius progrediendo erit quadratum tangentis E G ad quadratum rectæ B G , vt recta A V vnà cum B C ter ſumpta ad ipſam B C. Eſt autem ex prædemonſtratis in ſexta propoſitione diſſertationis vt quadratum E G ad quadratum B G, ita quadratum B F ad quadratum abſciſſæ ab axe per tangentem ad punctum F ductam : Ergo quadratum B F erit ad quadratum illius abſciſſæ vt eſt recta A V vnà cum B C ter ad B C. In reliquis imitabimur omninò & ſequemur veſtigia demonſtrationis præcedentis , niſi quod in figura ſeparata poſtquàm $\lambda\,\delta$ fuerit facta æqualis ipſi, B F, recta $\delta\theta$ fiet ſubtripla poteſtate ipſius B F vel $\delta\lambda$; curua $\lambda\,\phi\,\beta$, curuæ F A fiet æqualis ; curua $\theta\,\pi\,\beta$ eius erit naturæ vt omnes applicatæ ſequantur rationem baſium $\lambda\,\delta$, $\theta\,\delta$. In alia autem figura ſeparata in qua curuæ 9 11 X & 9 12 ψ, recta

405

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

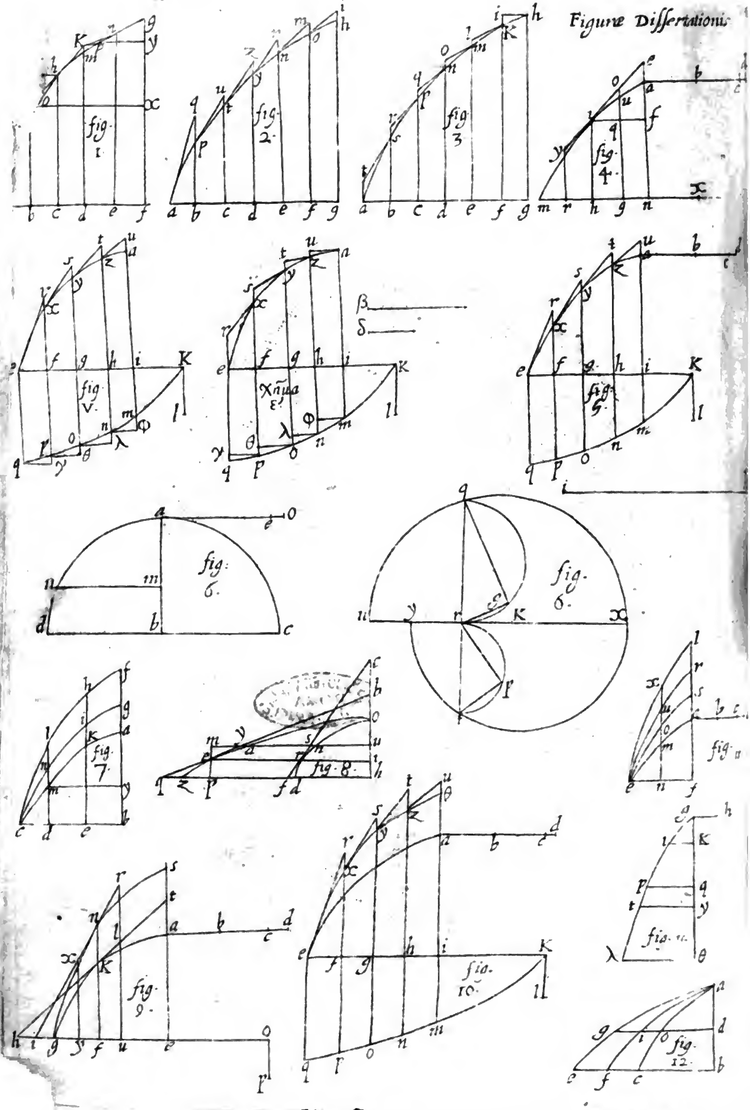
Digitized by Google

426

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Google

Figuræ Diſſertationis



Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google

420

ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by [illegible]

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA NAZ.
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google